ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)

Semestre d'automne — 2024-2025

Série 5: Opérations matricielles

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) calculer des **opérations matricielles** (*e.g.* **produits matriciels**, **transpositions**), ainsi que leurs propriétés ;

(O.2) déterminer si une matrice est **inversible** et calculer l'**inverse** si elle existe ;

(O.3) connaître les **matrices élémentaires** et le lien avec le calcul de matrices inverses.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- produit matriciel
- matrice transposée
- matrice identité
- matrice inversible
- matrice élémentaire
- matrice anti/symétrique

Noyau d'exercices

1.1 Produits matriciels

Pour le noyau : items (a) et (b).

Exercice 1 (Produits matricielles et compositions I)
Pour chacune des matrices suivantes, calculer les produits matriciels indiqués, et indiquer les compositions correspondantes de transformations linéaires avec les dimensions des espaces de départ et d'arrivée de chaque applications linéaire.

(a) AB, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

(b) ABC, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

(c) ABC, où $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Produits matricielles et compositions II)
Soient $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les applications linéaires données par

$$T_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \text{ et } T_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 + x_2 + x_3,$$

pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

(a) Écrire les matrices canoniques associées à T_1 et à T_2, ainsi que le produit matriciel associé à la composition $T_2 \circ T_1$ telle que $T_2 \circ T_1(\mathbf{x}) = T_2(T_1(\mathbf{x}))$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

(b) Quel est le domaine de définition de $T_2 \circ T_1$? Quel est l'ensemble d'arrivée ?

Exercice 3 (Produits matricielles I)
On considère les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C_\alpha = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & \alpha \end{pmatrix},$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Trouver (si elle existe) une matrice carrée B_1 de taille 2 non nulle telle que $A_1 B_1 = \mathbf{0}$.

(b) Trouver (si elle existe) une matrice carrée B_2 de taille 2 non nulle telle que $A_2 B_2 = \mathbf{0}$.

(c) Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$ a-t-on $A_3 C_\alpha = C_\alpha A_3$?

(d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = \mathbf{0}$.

Pour le noyau : items (a) et (c).

Exercice 4 (Propriétés élémentaires du produit matriciel)
Soient A une matrice de taille $m \times n$, et B et C des matrices de taille $n \times p$. Montrer les égalités suivantes :

(a) $A(B + C) = AB + AC$,

(b) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

(c) $\mathsf{I}_m A = A = A\mathsf{I}_n$, où I_q est la **matrice identité** de taille q, *i.e.* la matrice carrée de taille q avec 1 sur la diagonal et zéro ailleurs.

1.2 Matrices élémentaires et inversibilité

Exercice 5 (Matrices et opérations élémentaires)
Dans cet exercice, on travaille avec des matrices carrées de taille 4.

(a) Donner la matrice élémentaire qui permet de permuter les lignes 2 et 4.

(b) Donner la matrice élémentaire qui ajoute cinq fois la ligne 1 à la ligne 3.

(c) Donner la matrice élémentaire qui multiplie la ligne 3 par 17.

(d) Donner les inverses des matrices trouvées aux questions précédentes.

Pour le noyau : matrices A et C.

Exercice 6 (Matrices inversibles et opérations élémentaires)
Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Déterminer lesquelles des matrices précédentes sont inversibles. Utiliser le moins de calculs possible et justifier votre réponse. On **ne demande pas le calcul de l'inverse**.

Exercice 7 (Calcul de l'inverse d'une matrice I)
Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les inverses A^{-1} et B^{-1}.

1.3 Matrices symétriques et antisymétriques

Exercice 8 (Décomposition en matrices symétriques et antisymétriques)

Rappel de la théorie

On rappelle qu'une matrice carrée A est dite **symétrique** si $A = A^{\mathrm{T}}$, et **antisymétrique** si $A = -A^{\mathrm{T}}$. Noter que **la seule matrice carrée symétrique et antisymétrique est la matrice nulle**.

(a) Soient A et B deux matrices carrées antisymétriques de taille n.
  (i) Montrer que $A + B$ est antisymétrique.
  (ii) Montrer que, si A est inversible, alors A^{-1} est antisymétrique.

(b) Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chacune des matrices A et de B, calculer la décomposition en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Pour compléter la pratique

2.1 Produits matriciels

Exercice 9 (Produits matricielles II)
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

(a) AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA.

(b) AA^{T}, $A^{\mathrm{T}}A$, BA^{T}, BC^{T}, $C^{\mathrm{T}}A$, BD^{T}, $D^{\mathrm{T}}B$.

2.2 Matrices élémentaires et inversibilité

Exercice 10 (Lien entre matrices nilpotentes et inversibles)
Soit A une matrice carrée de taille n telle que $A^3 = \mathbf{0}$. Montrer que $\mathrm{I}_n - A$ est inversible et que son inverse est donnée par $(\mathrm{I}_n - A)^{-1} = \mathrm{I}_n + A + A^2$.

Exercice 11 (Calcul de l'inverse d'une matrice II)
Considérons les matrices suivantes :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \text{ et } B_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & \beta \\ 3 & 2 & 1-\beta \end{pmatrix},$$

pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des valeurs des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pour les quelles les matrices respectives sont inversibles. Ensuite, donner l'inverse de la matrice considérée pour ces valeurs des paramètres.

2.3 Matrices symétriques et antisymétriques

Exercice 12 (Symétrisation)
On rappelle que $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel de matrices carrées de taille n avec coefficients réels. Soit $T : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application donnée par $T(A) = A + A^{\mathrm{T}}$ pour tout $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(a) Déterminer si T est linéaire.

(b) Déterminer si T est surjective.

(c) Déterminer si T est injective.

(d) Déterminer l'ensemble K des matrices A qui vérifient $T(A) = \mathbf{0}$ et vérifier qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

2.4 Matrices triangulaires supérieures

Exercice 13 (Matrices triangulaires supérieures)

Rappel de la théorie

On rappelle qu'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,m} \end{pmatrix}$$

de taille $n \times m$ est **triangulaire supérieure** si $A_{i,j} = 0$ pour tous les indices i, j avec $i > j$.

(a) Montrer que l'ensemble de toutes les matrices triangulaires supérieures de taille $n \times m$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que, si A et B sont des matrices carrées triangulaires supérieures dans $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure.

(c) Montrer que, si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures dans $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ avec uniquement des coefficients 1 sur la diagonale, alors le produit AB est aussi une matrice triangulaire supérieure avec uniquement des coefficients 1 sur la diagonale.

(d) Montrer que, si $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure inversible, alors A^{-1} est aussi une matrice triangulaire supérieure.

(e) Sous quelle(s) condition(s) une matrice triangulaire supérieure est-elle inversible ? On s'intéressera aux coefficients diagonaux.

2.5 V/F et QCM sur les opérations matricielles

Exercice 14 (V/F sur les opérations matricielles)
Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

	V	F
(a) Une matrice A de taille $m \times n$ ne peut être multipliée par la gauche que par des matrices B de taille $p \times m$.	☐	☐
(b) Le produit matriciel est commutatif.	☐	☐
(c) Si le produit de deux matrices A et B est $AB = \mathbf{0}$, alors $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$.	☐	☐
(d) $(ABC)^\mathrm{T} = C^\mathrm{T} B^\mathrm{T} A^\mathrm{T}$.	☐	☐

Exercice 15 (QCM sur les opérations matricielles)
Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) L'énoncé juste est :

- ☐ étant donné deux matrices carrées A et B de la même taille, si A ou B n'est pas inversible, alors AB n'est pas inversible ;
- ☐ il existe deux matrice inversible A et une matrice B qui ne l'est pas telles que AB est inversible ;
- ☐ étant donné deux matrices inversibles A et B de la même taille, $A+B$ est inversible ;
- ☐ étant donné deux matrices inversibles A et B de la même taille, AB est inversible et $(AB^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$.

(b) L'énoncé juste est :

- ☐ $(AB)^\mathrm{T} = A^\mathrm{T} B^\mathrm{T}$, pour toutes les matrices A de taille $m \times n$ et B de taille $n \times p$;
- ☐ $(A^{-1})^\mathrm{T} = (A^\mathrm{T})^{-1}$ pour toute matrice inversible A ;

- [ ] pour toute matrice carrée A, si $A = A^{\mathrm{T}}$, alors A est diagonale ;
- [ ] $(AB)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}$, pour toutes les matrices carrées A et B de la même taille.

(c) L'énoncé juste est :

- [ ] une matrice carrée C de taille 2 vérifie $AC = CA$ pour toute matrice carrée A de taille 2 si et seulement si C est diagonale ;
- [ ] une matrice carrée C de taille 2 vérifiant $AC = CA$ pour toute matrice carrée A de taille 2 est **scalaire** (*i.e.* $C = \lambda \mathrm{I}_2$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$) ;
- [ ] étant donné deux matrices carrée A et C de taille 2 vérifiant $AC = CA$, alors A est diagonale ou C l'est ;
- [ ] étant donné deux matrices carrée A et C de taille 2 vérifiant $AC = CA$, alors A est scalaire ou C l'est.

(d) Étant donné une matrice A de taille 7×8, soit T l'application linéaire définie par $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Alors, $\mathbf{x}$ est un vecteur de

- [ ] $\mathbb{R}^7$;
- [ ] $\mathbb{R}^8$;
- [ ] $\mathbb{R}^{15}$;
- [ ] $\mathbb{R}^{56}$.

(e) Étant donné une matrice A de taille $m \times n$ et une matrice B de taille $n \times p$,

- [ ] alors BA est une matrice de taille $n \times n$;
- [ ] alors A^{T} est une matrice de taille $m \times n$;
- [ ] alors A représente une application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$;
- [ ] alors $(AB)^{\mathrm{T}}$ est une matrice de taille $p \times m$.

(f) Étant donné trois matrices carrées A, B et C de taille n,

- [ ] si $AC = BC$, alors $A = B$;
- [ ] si A est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$;
- [ ] si C est inversible et $AC = BC$, alors $A = B$;
- [ ] si $C = C^{\mathrm{T}}$ et $AC = BC$, alors $A = B$.

(g) Étant donné une matrice carrée A de taille n et un nombre réel λ, alors

- [ ] $A + \mathrm{I}_n$ est inversible ;
- [ ] $(A - \mathrm{I}_n)(A + \mathrm{I}_n) = A^2 - \mathrm{I}_n$;

- [ ] $(A + \mathrm{I}_n)(A + \mathrm{I}_n) = A^2 + \mathrm{I}_n$;
- [ ] $(\lambda A)^2 = \lambda A^2$.